Φυλλάδιο 2 ασκ 1)

$z^2-3z+2=0$ $\quad \Delta=(-3)^2-4\cdot 2=1$

Λύσεις $\rho_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{3-1}{2}=1$

$\rho_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{3+1}{2}=2$

$z^2-2z+3=0$ $\quad \Delta=(-2)^2-3\cdot 4=4-12=-8$

Αναζητούμε μιγαδικό $\sqrt{\Delta}$ με $(\sqrt{\Delta})^2=-8$
Θέτουμε $\sqrt{\Delta}=i2\sqrt{2}\in\mathbb{C}$

ρίζες: $\rho_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2-i2\sqrt{2}}{2}=1-i\sqrt{2}$

$\rho_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2+i2\sqrt{2}}{2}=1+i\sqrt{2}$

ασκ 8) Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά τη διαίρεση ενός z με i

Λύση Αν $z=0$ τότε $\frac{z}{i}=0$

Έστω $z\neq 0$ με τριγωνομετρική μορφή $z=|z|(\cos\phi+i\sin\phi)$ με $\phi\in\mathbb{R}$.
Έχουμε $\frac{1}{i}=\frac{\bar{i}}{|i|^2}=\frac{-i}{1}=-i=\cos(\frac{\pi}{2})+i\sin(\frac{3\pi}{2})=\cos(-\frac{\pi}{2})+i\sin(-\frac{\pi}{2})$

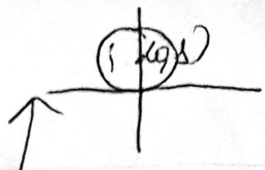
Συνεπώς $\frac{z}{i}=z\frac{1}{i}=z(-i)=|z|(\cos\phi+i\sin\phi)(\cos(-\frac{\pi}{2})+i\sin(-\frac{\pi}{2}))=$

$=|z|(\cos(\phi-\frac{\pi}{2})+i\sin(\phi-\frac{\pi}{2}))$

Άρα $|\frac{z}{i}|=|z|$ κ' μία γωνία του $\frac{z}{i}$ είναι η $\phi-\frac{\pi}{2}$

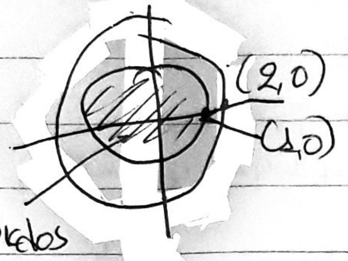
Με άλλα λόγια γεωμετρικά η απεικόνιση z πάει στο $\frac{z}{i}$ είναι στροφή στο μιγαδικό επίπεδο κατά γωνία $\frac{\pi}{2}$ σύμφωνα με τη φορά των δεικτών ενός ρολογιού

3) (i) $|z| = 1$. Απάντηση: Δίνουν τον μοναδιαίο κύκλο

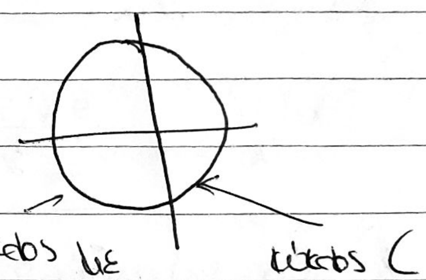


(ii) $|z-i| = 1$ Έχουμε ότι $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. $|z_1 - z_2|$ = η απόσταση τους στο μιγαδικό επίπεδο. Συνεπώς $|z-i| = 1$ αν κ' μόνο αν το z είναι στον κύκλο με κέντρο το $(0,1)$ κ' ακτίνα 1

(iii) $1 < |z| < 2$



(iv) $|z| \geq 2 \iff z \in \mathbb{C}$ ή z έξω από το C



9) Αφού $z = \cos\theta + i\sin\theta$ με $\theta \in \mathbb{R}$, έχουμε $|z| = \sqrt{\cos^2\theta + i\sin^2\theta} = \sqrt{1} = 1$

Συνεπώς $\frac{1}{z} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta)$.

Από τύπο de Moivre, για $n \geq 1$ ακέραιο

(1) $z^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$ κ' $\left(\frac{1}{z}\right)^n = \cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta) = \cos(n\theta) - i\sin(n\theta)$ (2)

Προσθέτω (1) + (2) $\Rightarrow z^n + \left(\frac{1}{z}\right)^n = 2\cos(n\theta)$

(1) − (2): $z^n - \left(\frac{1}{z}\right)^n = 2i\sin(n\theta)$

Φυλλάδιο 1 ασκ 8

Βρείτε τα $z\in\mathbb{C}$ με $\bar{z}=z^2$

ΛΥΣΗ Μια λύση είναι $z=0$. Υποθέτω $z\neq 0$ κ' $\bar{z}=z^2 \Rightarrow z\cdot\bar{z}=z\cdot z^2 \Rightarrow |z|^2=z^3$ (1)

Παίρνουμε $|\,|$ στην (1) κ' έχουμε $||z|^2|=|z^3| \Rightarrow |z|^2=|z|^3 \overset{z\neq 0}{\Rightarrow} |z|=1$

Συνεπώς η (1) γίνεται $z^3=1$

Άρα $z\in\{\omega,\omega^2,\omega^3\}$ όπου ω η αρχική 3 ρίζα της μονάδος, δηλαδή

$\omega=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

Αντίστροφα βλέπουμε ότι: $\omega^3=1 \Rightarrow \omega^2\omega=1 \Rightarrow \omega^2\omega\bar{\omega}=1\bar{\omega} \Rightarrow \omega^2=\bar{\omega}$

Άρα ω λύση της $\bar{z}=z^2$. Παρόμοια κ' ω^2 κ' $\omega^3=1$ λύσεις της $\bar{z}=z^2$

Συνεπώς η εξίσωση έχει 4 λύσεις: $0,\omega,\omega^2,\omega^3$

Φυλλάδιο 2 ασκ 9

$|z^2|=z^2$ $\qquad$ $z=x+iy,\ x,y\in\mathbb{R}$

ΛΥΣΗ

Έχουμε $|z^2|=|z|^2=x^2+y^2$ κ' $z^2=(x+iy)^2=x^2+2ixy+(iy)^2=(x^2-y^2)+2xyi$ (2)

Άρα (1)=(2) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=x^2-y^2 \\ 2xy=0 \end{cases}$

Συνεπώς $xy=0 \Rightarrow x=0$ ή $y=0$

Αν $x=0$ $\quad y^2=-y^2 \overset{x,y\in\mathbb{R}}{\Rightarrow} y=0$ $\quad$ κ' έχουμε λύση $z=0$

Υποθέτουμε $y=0$. Τότε το x μπορεί να είναι οποιοσδήποτε στο $\mathbb{R}$.

Άρα έχουμε ως λύσεις $z=x\in\mathbb{R}$

Συνεπώς, το σύνολο λύσεων είναι το $\mathbb{R}\subseteq\mathbb{C}$

ασκ 4

$$A = \{ 2z+1 : z \in \mathbb{C}, |z|=1 \}$$

Θέλουμε να βρούμε όλους τους μιγαδικούς ω ώστε $\exists\, z \in \mathbb{C}$ με $|z|=1$ με την ιδιότητα $\omega = 2z+1$.

ΛΥΣΗ Έστω $\omega \in A$. Τότε $\exists\, z \in \mathbb{C}$ με $|z|=1$ κ' $\omega = 2z+1 \Rightarrow \omega - 1 = 2z \Rightarrow \frac{\omega-1}{2} = z$

Συνεπώς $\left|\frac{\omega-1}{2}\right| = |z| = 1 \Rightarrow \frac{|\omega-1|}{2} = 1 \Rightarrow |\omega-1| = 2$

Συνεπώς το ω είναι σε κύκλο με κέντρο το $(1,0)$ κ' ακτίνα ίση με 2

Αντίστροφα αν $|\omega-1|=2 \Rightarrow \left|\frac{\omega-1}{2}\right| = 1$.

Θέτουμε $z = \frac{\omega-1}{2}$. Τότε $z \in \mathbb{C}$ με $|z|=1$ κ' $\omega = 2z+1$

ασκ 12

$$z^4 = 16\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$$

ΛΥΣΗ

ΒΗΜΑ 1: Θέτουμε ω την αρχική 4η ρίζα της μονάδος άρα
$\omega = \cos\frac{2\pi}{4} + i\sin\frac{2\pi}{4} = i$

ΒΗΜΑ 2: Θέτουμε $\alpha = 16\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$
Είναι η τριγωνομετρική μορφή του α

ΒΗΜΑ 3: Θέτουμε $b = (16)^{1/4}\left(\cos\left(\frac{\frac{4\pi}{3}}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{4\pi}{3}}{4}\right)\right) = 2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{12}\right)\right)$
$= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

ΒΗΜΑ 4: Από τη θεωρία η εξίσωση έχει τις εξής 4 λύσεις:
$\omega b, \omega^2 b, \omega^3 b, \omega^4 b$

ΒΗΜΑ 5: Κάνουμε πράξεις

Βαθμού 2 $\quad az^2+bz+c=0 \quad a,b,c\in\mathbb{C} \quad a\neq 0$

Βαθμού 1 $\quad az+b=0 \quad a,b\in\mathbb{C}, a\neq 0$

Έχει μοναδική λύση $z=-\frac{b}{a}$

Βαθμού 3 $\quad az^3+bz^2+cz+d=0 \quad a,b,c,d\in\mathbb{C}, a\neq 0$

(Εκτός ύλης) Θέτουμε $y=z-\frac{b}{3a}$

Γίνεται $y^3=py+q$

Αρχές 16ου αι. S. del Ferro, N. Tartaglia

Μία λύση $y=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{D}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{D}}$

όπου $D=\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^2$

Βαθμού 4: $a_4z^4+a_3z^3+a_2z^2+a_1z+a_0=0 \quad a_i\in\mathbb{C} \quad a_4\neq 0$

Υπάρχουν αντίστοιχοι (πιο περίπλοκοι) τύποι με ριζικά που δίνουν λύσεις στο $\mathbb{C}$

Βαθμού $n\geq 5$ (*) $a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\dots+a_1z+a_0=0, \ a_i\in\mathbb{C} \quad a_n\neq 0$

Θεμελιώδες θεώρημα Άλγεβρας

Η (*) έχει ακριβώς n ρίζες στο $\mathbb{C}$

Η θεωρία Galois (Αλγ. Δομές ΙΙ) δίνει ότι για $n\geq 5$ γενικά δεν υπάρχουν τύποι με ριζικά που να δίνουν τις λύσεις της (*)